

LISTAGEM DE EXERCÍCIOS
DE
ANÁLISE MATEMÁTICA I (B, C, D, E)

2^o semestre 2009-2010

Departamento de Matemática

FCT/UNL

1 Noções Topológicas

1. Considere os conjuntos

$$\begin{aligned}A &= [0, 2[, \\B &= \{0, 1, 2, 3\}, \\C &= \mathbb{Q}, \\D &= \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}.\end{aligned}$$

Para cada um destes conjuntos, determine:

- (a) o interior;
- (b) a fronteira;
- (c) o exterior;
- (d) a aderência;
- (e) o derivado;
- (f) o conjunto dos pontos isolados;
- (g) o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes, caso existam;
- (h) o supremo e o ínfimo, caso existam;
- (i) o máximo e o mínimo, caso existam.

2. Considere o seguinte conjunto:

$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| \geq 2\} \cap [-2, 8].$$

- (a) Determine o interior, o exterior e a fronteira de E .
- (b) Determine a aderência, o derivado e o conjunto dos pontos isolados de E .
- (c) Indique, justificando, se E é um conjunto limitado.

3. Considere o seguinte conjunto:

$$F = \{x \in \mathbb{N} : x^2 - 5x + 9 > 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x - 1 \leq 7\}.$$

- (a) Determine o interior, o exterior e a fronteira de F .
- (b) Determine a aderência, o derivado e o conjunto dos pontos isolados de F .
- (c) Indique, justificando, se F é um conjunto aberto ou um conjunto fechado.

4. Considere o seguinte conjunto:

$$G = \left\{x \in \mathbb{R} : x = 1 + 2 \sin \left(\frac{\pi}{n+1} \right), n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-2}{x+1} > 0\right\}.$$

- (a) Determine o interior, o exterior e a fronteira de G .
- (b) Determine a aderência, o derivado e o conjunto dos pontos isolados de G .
- (c) Indique, justificando, se G é um conjunto aberto ou um conjunto fechado.

5. Considere o seguinte conjunto:

$$H = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 9\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 - 2x - 5 \leq 0\}.$$

- (a) Determine o interior, o exterior e a fronteira de H .
- (b) Determine a aderência, o derivado e o conjunto dos pontos isolados de H .
- (c) Determine, se existirem, o conjunto dos majorantes, o supremo, o máximo, o conjunto dos minorantes, o ínfimo e o mínimo de H .

6. Considere o seguinte conjunto:

$$I = \{x \in \mathbb{N} : x^2 - 5x + 9 > 3\}.$$

- (a) Determine a aderência, o derivado e o conjunto dos pontos isolados de I .
- (b) Determine, se existirem, o conjunto dos majorantes, o supremo, o máximo, o conjunto dos minorantes, o ínfimo e o mínimo de I .
- (c) Indique, justificando, se I é um conjunto limitado.

7. Considere o seguinte conjunto:

$$J = \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| > |x + 1|\} \setminus \{-1\}.$$

- (a) Determine o interior, o exterior, a fronteira, a aderência, o derivado e o conjunto dos pontos isolados de J .
- (b) Determine, se existirem, o conjunto dos majorantes, o supremo, o máximo, o conjunto dos minorantes, o ínfimo e o mínimo de J .
- (c) Indique, justificando, se J é um conjunto aberto, fechado ou limitado.

2 Indução Matemática

1. Mostre, usando o princípio de indução matemática, que

(a) $\sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0;$

(b) $n! \leq n^n, \quad \forall n \in \mathbb{N};$

(c) $4^{2n} - 1$ é múltiplo de 5, $\forall n \in \mathbb{N};$

(d) $\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{k+2} - \frac{k-1}{k+1} \right) = \frac{n}{n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$

(e) $\frac{3^n}{n!} < 4^2 \left(\frac{3}{4} \right)^n, \quad \forall n > 3;$

(f) $n^3 + 5n$ é divisível por 3, $\forall n \in \mathbb{N}.$

2. Considere a proposição $p(n) : \sin(2n\pi) = 1$

(a) Mostre que $p(j)$ verdadeira $\implies p(j+1)$ verdadeira.

(b) Mostre que $p(n)$ não é verdadeira para nenhum número natural n .

3. Observando as igualdades

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

.....

induza o resultado geral e prove-o, usando o princípio de indução matemática.

3 Sucessões de números reais

1. Considere a sucessão definida por recorrência

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- (a) Prove, por indução, que $0 < u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$.
(b) Prove que a sucessão é monótona crescente.

2. Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{(-1)^{3n}}{\sqrt{n}}$. Indique, justificando, quais das seguintes sucessões são subsucessões de u_n :

- (a) $\frac{1}{\sqrt{2n}}$;
(b) $\frac{1}{\sqrt{n}}$;
(c) $-\frac{1}{\sqrt{n}}$;
(d) $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

3. Mostre, usando a definição, que

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$;
(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n + 2}{e^n} = 1$;
(c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$;
(d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + n + 3} = 0$.

4. Dê exemplos de sucessões (u_n) e (v_n) tais que $u_n \rightarrow 0$, $v_n \rightarrow +\infty$ e que:

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 2$;
(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 0$;
(c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n$ não existe.

5. Calcule, se existirem, os seguintes limites:

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}}$;
(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{n-2}{n^3 + 2n^2 - 2} \right|$;
(c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$;

- (d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n}}};$
- (e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + n^{-2})^n;$
- (f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{n-2}}{(n + \pi)^n} (n^2 + 1);$
- (g) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 5} + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{2n^3 + n^2} + \frac{n}{2}} + \frac{n^2 + 1}{n\sqrt{n}};$
- (h) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n \sin(n^2 + 2n)}{2^{2n+1} + 2^n};$
- (i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{n^2}}{(1 + n^2)^{\frac{n^2}{2}}};$
- (j) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{2n+1} \left(\frac{n+2}{4n+1} \right)^n;$
- (k) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}) \cos(n^3 + 1);$
- (l) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k};$
- (m) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^{n+1}};$
- (n) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n^2);$
- (o) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(\sin n)^2}{5n^3 + k};$
- (p) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sqrt[n]{\frac{1}{2^{3n} n!}}.$

6. Considere a sucessão

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

- (a) Prove que a sucessão é limitada.
- (b) Prove que a sucessão é monótona.
- (c) Prove que a sucessão é convergente.
7. Usando a caracterização de conjuntos fechados em termos de limites de sucessões convergentes, mostre que os seguintes conjuntos não são fechados:
- (a) $]0, 1];$
- (b) $\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}.$

8. Calcule os sublimites das seguintes sucessões e indique em cada caso os respectivos limite superior e limite inferior:

(a) $(-1)^n \frac{n}{n+1}$;

(b) $(-1)^n n + n$;

(c) $\frac{\cos(n\pi) + \cos(2n\pi)}{n}$;

(d) $\sqrt[n]{n2^n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

9. Considere a sucessão de números reais definida, por recorrência,

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(a) Mostre que a sucessão é monótona.

(b) Mostre que $u_n \leq 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Mostre que a sucessão é convergente e calcule o seu limite.

10. Prove, usando a definição, que a sucessão $a_n = \frac{1}{n}$ é uma sucessão de Cauchy.

4 Limites, Continuidade e Cálculo Diferencial

1. Prove, usando a definição, que

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} 3x + 2 = 5$;

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x+1} = 2$.

2. Justifique convenientemente a seguinte afirmação: " $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$ ".

3. Seja g a função definida, em $\mathbb{R}$, por

$$g(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{se } x > -1 \\ -x + 2, & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico de g .

(b) Mostre que não existe $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$.

4. Considere a função f real de variável real

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{se } x < 1 \\ x + 4, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Calcule $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

5. Seja f a função definida, em $\mathbb{R}$, por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x > 1 \\ 2 - 3x, & \text{se } x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Mostre que não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

(b) Defina, em $\mathbb{R}$, uma função g tal que $\lim_{x \rightarrow 1} (f + g)(x) = 4$.

6. Para cada número real m , a expressão seguinte define uma função real de variável real:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - m + 7, & \text{se } x > 0 \\ 5, & \text{se } x = 0 \\ |x + 3| + m, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

(a) Determine m de modo que exista $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.

- (b) Calcule m de modo que $\lim_{x \rightarrow -5} h(x) = h(0)$. Neste caso, a função é injectiva? Justifique.

7. Seja f a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x}, & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

- (a) Determine o domínio da função e estude-a quanto à continuidade.
(b) Determine os zeros da função dada.
(c) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

8. Considere a função g , real de variável real,

$$g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x > 2 \\ \frac{1}{2}x, & \text{se } x \leq 2. \end{cases}$$

- (a) Calcule $g(0)$ e $g(3)$.
(b) Mostre que $\forall x \in [0, 3], g(x) \neq \frac{5}{2}$.
Isto contradiz o teorema de Bolzano? Justifique.
(c) Averigüe se a restrição de g ao intervalo $[0, 2]$ é necessariamente limitada.

9. Sejam f e g duas funções contínuas em $[a, b]$ tais que $f(a) = g(b)$ e $f(b) = g(a)$. Mostre que $f - g$ tem pelo menos um zero pertencente ao intervalo $[a, b]$.

10. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & \text{se } x \geq 0 \\ \cos(x) \log(x+1), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

- (a) Determine o domínio de f e estude-a quanto à continuidade.
(b) Mostre que existe $a \in [-\frac{\pi}{4}, 1]$ tal que $f(a) = 0$.
(c) Justifique que a função tem um máximo e um mínimo no intervalo $[0, 1]$. Indique os seus valores.

11. Considere a função real de variável real definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3^x + 2^x}{2 - e^x}, & \text{se } x \geq 0 \\ \arctan(x), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

- (a) Determine o domínio da função e estude-a quanto à continuidade.

- (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- (c) O teorema de Weierstrass garante a existência de máximo e mínimo da função no intervalo $[-1, 1]$?

12. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), & \text{se } x < 1 \\ e^x - \log(x^2), & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

- (a) Determine o domínio da função e estude-a quanto à continuidade.
- (b) A função f é diferenciável em $x = 1$? Justifique.
- (c) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (d) Verifique se é ou não possível prolongar f por continuidade ao ponto $x = 0$.

13. Considere a função g , real de variável real, tal que

$$g(x) = \begin{cases} e^{-bx+b}, & \text{se } x < 1 \\ (x-2)^2, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Determine o número real b de modo a que a função g seja diferenciável em $x = 1$.

14. Seja $A = [0, 2\pi]$ e considere a função

$$\begin{aligned} g : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1 + |\sin(x)|. \end{aligned}$$

- (a) Mostre que g é contínua no intervalo A , mas que não tem derivada no ponto $x = \pi$.
- (b) Seja a_n uma sucessão monótona de termos de A . Averigüe se a_n é necessariamente convergente para um ponto de A .

15. Dada a função $f(x) = \frac{\pi}{3} - 2 \arccos\left(\frac{3x}{2}\right)$, mostre que a recta de equação $y - 3x + \frac{2\pi}{3} = 0$ é tangente ao gráfico da função f . Determine o ponto de tangência.

16. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \cos(3x)$.

- (a) Calcule a terceira derivada de f .
- (b) Prove, pelo princípio de indução matemática, que $f^{(n)}(x) = 3^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

17. Dadas as funções f e g definidas por $f(x) = 2 \cot(3x)$ e $g(x) = \frac{\pi}{2} + \arcsin(1-x)$, determine a derivada de $f \circ g$ no ponto de abscissa 1.

18. Dadas as funções

$$\begin{array}{ll} f: [-2, 0] \rightarrow [0, \pi] & \text{e} \quad g: \left] -\frac{1}{5}, +\infty \right[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \arccos(x+1) & x \mapsto \log_2(5x+1), \end{array}$$

calcule as derivadas de f e de g , utilizando o teorema da derivada da função inversa.

19. Considere a função real de variável real

$$f(x) = \begin{cases} x|x|, & \text{se } x > -2 \\ (x+2)^2 - 4, & \text{se } x \leq -2. \end{cases}$$

- (a) Determine o domínio de f .
- (b) Estude f quanto à continuidade.
- (c) Determine a função derivada f' .
- (d) Determine a função segunda derivada f'' .

20. Considere a função f real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{|x-1|}, & \text{se } x > 0 \\ \arctan(x), & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

- (a) Estude a função f quanto à continuidade.
- (b) Estude a função f quanto à diferenciabilidade e determine a função f' .
- (c) Determine o sinal da função segunda derivada f'' .

(Nota: pode usar, sem demonstrar, que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$.)

5 Teoremas fundamentais (Rolle, Lagrange e Cauchy). Indeterminações.

1. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = x^4 - x^2 - 1$.
 - (a) Mostre que f verifica as condições do teorema de Rolle no intervalo $[-2, 2]$.
 - (b) Determine o(s) ponto(s) em que a recta tangente ao gráfico da função é horizontal.
2. Considere a função $g : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = |x - 1|$.
 - (a) Mostre que g é contínua no seu domínio e que $g(-1) = g(3)$.
 - (b) Verifique que $g'(x)$ não se anula para qualquer valor de x .
 - (c) Explique por que motivo não existe contradição com o teorema de Rolle.
3. Determine o número exacto de zeros da função real de variável real, definida por $h(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.
4. Considere a função real de variável real definida, no intervalo $[-2, 2]$, por $f(x) = \frac{x^3}{4} + 1$.
 - (a) Mostre que esta função verifica as condições do teorema de Lagrange.
 - (b) Determine o(s) ponto(s) em que a recta tangente ao gráfico de f é paralela ao segmento de extremos $A(-2, f(-2))$ e $B(2, f(2))$.
5. Considere a função real de variável real definida, no intervalo $[-1, 8]$, por $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$.
 - (a) Mostre que não existe c no intervalo $] -1, 8[$ tal que $f'(c) = \frac{f(8) - f(-1)}{8 - (-1)}$.
 - (b) A alínea anterior contradiz o teorema de Lagrange? Justifique.
6. Considere a função real de variável real, definida por $g(x) = 1 + x \log(x)$. Aplicando o teorema de Lagrange à função g , mostre que o seguinte conjunto de desigualdades é satisfeito
$$1 + \log(x) < \log(4x) < 1 + \log(2x), \forall x \geq 1.$$
Sugestão: considere intervalos da forma $[x, 2x]$, com $x \geq 1$.
7.
 - (a) Seja f uma função real de variável real, diferenciável num intervalo I . Mostre, utilizando o teorema de Lagrange que, se existir $M > 0$ tal que $|f'(x)| \geq M, \forall x \in I$, então $|f(x) - f(y)| \geq M|x - y|, \forall x, y \in I$.
 - (b) Utilize o resultado da alínea anterior para mostrar que $|\tan(x) - \tan(y)| \geq |x - y|, \forall x, y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
8. Seja f a função real de variável real definida por $f(u) = \log(u)$.

- (a) Mostre que o teorema do valor médio de Lagrange pode ser aplicado à função f , em qualquer intervalo da forma $[1, x]$, para $x > 1$, e determine o valor médio para o caso em que $x = e$.
- (b) Prove, utilizando o referido teorema que, $\forall x > 1, \quad x - 1 < \log(x^x) < x^2 - x$.
9. Considere f , uma função contínua e diferenciável em $[0, +\infty[$ tal que $f(0) = 0$ e $0 < f'(x) \leq 1$.
- (a) Justifique que f só se anula num ponto.
Sugestão: Considere o intervalo $[0, b]$, $b > 0$, e aplique o teorema de Rolle.
- (b) Prove que $\forall x \geq 0, f(x) \leq x$.
10. Verifique que não é possível aplicar a regra de Cauchy no cálculo dos limites seguintes, e calcule-os por um outro processo.
- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sin(x)}{3x + \sin(x)}$;
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)$.
11. Calcule, se existirem, os seguintes limites:
- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x}{\log(x + e) - 1}$;
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \log(\sin(x))}{\log(x)}$;
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^2 + 1)}{1 + \log(x)}$;
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\cot(x) - \frac{1}{x} \right)$;
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan(x) \log(x))$;
- (f) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1)^{\tan(x-1)}$;
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 2x)^{\frac{1}{x}}$.

6 Teorema de Taylor, Fórmula de Taylor e Aplicações

- (a) Determine a fórmula de Taylor de ordem 4, em torno do ponto $x = 1$, da função definida por $f(x) = \log(x)$, indicando em que intervalo esse desenvolvimento representa a função.
(b) Usando a alínea anterior, prove que

$$\log(x) \leq (x-1) \left(1 - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{3} \right), \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

- Considere a função real de variável real definida por $g(x) = e^x$.
 - Determine a fórmula de MacLaurin, com resto de ordem 6, da função g .
 - Utilizando a fórmula de MacLaurin de ordem n da função g , determine um valor aproximado de e com quatro casas decimais exactas.
- Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \log(\cos(x))$.
 - Determine a fórmula de MacLaurin, com resto de ordem 3, da função f .
 - Utilize a alínea anterior para mostrar que $\log(\cos(x)) < -\frac{x^2}{2}, \forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$.
- Seja h a função real de variável real definida por $h(x) = \frac{1}{1-x}$.
 - Calcule $h'(x)$, $h''(x)$, $h'''(x)$ e $h^{(4)}(x)$ e obtenha uma expressão para $h^{(n)}(x)$.
 - Prove, pelo princípio de indução matemática, que a expressão de $h^{(n)}(x)$, obtida na alínea anterior, é válida para todo o número natural.
 - Determine a fórmula de MacLaurin de ordem n para a função h .
- Calcule, recorrendo à fórmula de Taylor, os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2} + \cos(x)}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2};$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{-x} - x + x^2}{x^3}.$

- Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = x^3(x-2)$. Determine, caso existam, os extremos locais e os pontos de inflexão de g .
- Seja $g \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $g'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Considere ainda a função $h(x) = g(x-x^2)$. Mostre que h tem um extremo local, e classifique-o. Trata-se de um extremo absoluto? Justifique.

7 Estudo de funções

1. Considere a função real de variável real

$$f(x) = \begin{cases} x|x|, & \text{se } x > -2 \\ (x+2)^2 - 4, & \text{se } x \leq -2. \end{cases}$$

- (a) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f .
- (b) Determine os sentidos de concavidade e os pontos de inflexão de f .
- (c) Esboce o gráfico de f e determine o seu contradomínio.

2. Considere a função f real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{|x-1|}, & \text{se } x > 0 \\ \arctan(x), & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

- (a) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f .
- (b) Determine os sentidos de concavidade e os pontos de inflexão de f .
- (c) Esboce o gráfico de f e determine o seu contradomínio.

3. Considere a função f real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{se } x < 0 \\ \log(-2x^2 + x + 1), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Determine o domínio da função e estude-a quanto à continuidade.
- (b) Estude a função f quanto à diferenciabilidade e determine a função f' .
- (c) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f .
- (d) Determine a função segunda derivada f'' .
- (e) Determine os sentidos de concavidade e os pontos de inflexão de f .
- (f) Esboce o gráfico de f .

8 Primitivação

1. Determine as primitivas das funções definidas pelas seguintes expressões analíticas:

(a) $e^x + \frac{1}{x}$;

(b) $4^x + 3x^5 + 2$;

(c) $\sin(x) \cos(x)$;

(d) $\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$;

(e) $6x(x^2 + 1)$;

(f) $6^{4x} + e^{5x}$;

(g) $\cos(\cos(x)) \sin^2(\cos(x)) \sin(x)$;

(h) $e^{x^2 + 2 \sin(x)}(x + \cos(x))$;

(i) $\cos(2x) \cos(x)$;

(j) $\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$;

(k) $\frac{\log(\arcsin(x))}{\arcsin(x) \sqrt{1 - x^2}}$;

(l) $\frac{(1 + 2 \arctan(x))^3}{1 + x^2}$;

(m) $\frac{1}{\cos^2(x) \sqrt{1 + \tan(x)}}$;

(n) $\frac{\arctan(x)}{1 + x^2}$;

(o) $\frac{\sqrt{1 + \log(x^8)}}{x}$;

(p) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x^3 \right)^2$;

(q) $\frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$;

(r) $\cos^2(x)$;

(s) $\frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$.

2. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \cos(4x + \pi)$. Determine a primitiva de f que toma o valor 2 quando $x = 0$.

3. Primitive, por partes, as funções definidas pelas seguintes expressões analíticas:

(a) $(3x - 1) \sin(x)$;

- (b) $\log^2(x)$;
- (c) $x^2 e^x$;
- (d) $\frac{\log(\log(x))}{x}$.

4. Usando em cada caso a substituição indicada, primitive as funções definidas por:

- (a) $\frac{1 + 4e^x}{1 + 2e^x} \quad (e^x = t)$;
- (b) $\frac{1}{1 - \cos(x)} \quad (\tan(x/2) = t)$;
- (c) $\tan^3(x) \quad (\tan(x) = t)$;
- (d) $\frac{\sqrt{x}}{4 + \sqrt{x}} \quad (\sqrt{x} = t)$.

5. Determine as primitivas das funções racionais definidas pelas seguintes expressões analíticas:

- (a) $\frac{x^4}{x + 2}$;
- (b) $\frac{1}{(x + 2)(x - 3)(x + 4)}$;
- (c) $\frac{x^2 - x}{(x + 1)^2(x - 2)}$;
- (d) $\frac{-4x}{x^2 + 4x + 3}$.

6. Determine as primitivas das funções racionais definidas pelas seguintes expressões analíticas:

- (a) $\frac{1}{x^2 + 2x + 5}$;
- (b) $\frac{x^4 + x^2 - x + 1}{x^3 + x}$;
- (c) $\frac{x^2 + 6x}{x^3 + x^2 + 4x + 4}$;
- (d) $\frac{2x^3 + x^2 + 4x + 3}{2x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 2}$.

7. Determine as primitivas das funções irracionais definidas pelas seguintes expressões analíticas:

- (a) $\frac{\sqrt{2x + 3}}{\sqrt[4]{2x + 3} + 2}$;
- (b) $\frac{1}{x\sqrt{x^2 - x - 1}}$;

$$(c) \frac{1}{x - \sqrt[3]{3x - 2}};$$

$$(d) \frac{1}{x\sqrt{x^2 + x - 2}}.$$

8. Determine as primitivas das funções transcendentas definidas pelas seguintes expressões analíticas:

$$(a) \frac{\cos(x)}{1 + \cos(x)};$$

$$(b) \frac{e^{2x}}{e^x + 1};$$

$$(c) \frac{1}{1 + \sin^2(x)};$$

$$(d) \frac{1}{(2 + \cos(x))(1 + \sin(x))}.$$

9. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{e^x}{(e^{2x} - e^x - 2)^2}$. Determine a primitiva de f que toma o valor 1 quando $x = 0$.

10. Primitive as funções definidas pelas seguintes expressões analíticas:

$$(a) \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} + 3x^2 \arctan(x);$$

$$(b) \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)};$$

$$(c) x^2 \sin(4x);$$

$$(d) \frac{x^2 + 1}{4 + 2x^2};$$

$$(e) \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}}{3};$$

$$(f) \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x};$$

$$(g) e^x \sin(x);$$

$$(h) \arctan(x);$$

$$(i) \frac{1}{x + 2} \sqrt{\frac{x + 1}{x + 2}};$$

$$(j) \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}};$$

$$(k) \frac{\sin(x) \cos(x)}{4 \cos^2(x) + \sin(x) \cos(x)};$$

$$(l) \cos(\sin(x)) \cos(x).$$

11. Determine a função real de variável real que satisfaz simultaneamente as condições $f'(x) = x \cos(x^2) + xe^{2x} - 1$ e $f(0) = 2$.

9 Cálculo Integral. Áreas de figuras planas

1. Calcule os seguintes integrais:

(a) $\int_1^5 \frac{1}{(x+7)^2} dx;$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) dx;$

(c) $\int_0^1 e^{ax} \sin(bx) dx \quad (a, b \in \mathbb{R});$

(d) $\int_4^9 \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx;$

(e) $\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x} dx;$

(f) $\int_{-1}^{15} \frac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1} + 2} dx;$

(g) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos(x)}{\sin^2(x)} dx;$

(h) $\int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx;$

(i) $\int_1^2 \frac{2x^3 + 2x^2 + 5x + 3}{x^4 + 2x^3 + 3x^2} dx.$

2. Calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt;$

(b) $F(x) = \int_0^{x^3} e^t dt;$

(c) $F(x) = \int_{x^2}^0 \sin(t) dt;$

(d) $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \log(t) dt.$

3. Calcule, caso exista, o seguinte limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x^2} \sin(t^2) dt}{\sin^2(x)}.$$

4. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \int_0^{\sin(x)} e^{t^2} dt.$$

- (a) Determine a função f' . Justifique a resposta.
- (b) Determine os extremos relativos de f . Justifique a resposta.

5. Determine a área de cada um dos seguintes domínios:

- (a) Domínio limitado pelos gráficos das funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{-x}$, e pelas rectas de equação $x = -1$ e $x = 2$;
- (b) Domínio limitado pela parábola de equação $y^2 = 2x - 2$ e pela recta de equação $y - x + 5 = 0$;
- (c) Domínio contido no semiplano $x \geq -1$ e limitado pela recta de equação $y = 0$ e pelo gráfico da função $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 3)^2}$;
- (d) Domínio limitado pelos gráficos das funções $f(x) = \arctan(x)$ e $g(x) = \frac{\pi}{4}x^2$;
- (e) Domínio limitado pelos gráficos das funções $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 3x$ e $h(x) = 6x$.

10 Integrais impróprios

1. Recorrendo à definição de integral impróprio, estude a natureza dos seguintes integrais calculando, se possível, o seu valor:

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$

(b) $\int_0^1 x \log(x) dx.$

2. Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^3 + x^2 - 1} dx;$

(b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx;$

(c) $\int_2^{+\infty} \frac{\log(x)}{\sqrt{x} + x^2 + 1} dx;$

(d) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x^3 + 1}} dx;$

(e) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1} dx;$

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \tan(x)} dx;$

(g) $\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx;$

(h) $\int_0^2 \frac{2}{x^2 - 2x} dx;$

(i) $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2x - 1}} dx;$

(j) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{1 - x^4}} dx.$

3. Determine a área de cada um dos seguintes domínios planos ilimitados:

(a) domínio contido no semiplano $y \leq 0$, e limitado pela recta de equação $x = 0$ e pelo gráfico da função $f(x) = \log(x)$;

(b) domínio definido pelo gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e pelas rectas de equação $x = 1$ e $y = 0$.

4. Estude a natureza do seguinte integral impróprio, em função do parâmetro real α :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1 + x^3} dx.$$